Indice

→ Spazi Vettoriali . pag. 1

→ Associatività del prodotto tra matrici, introduzione alle matrici . pag. 3

→ Sottospazi Vettoriali . pag. 7

→ Basi, dimensione e coordinate . pag. 12

→ Estrazione, completamento e riduzione a scala . pag. 16

→ Formula di Grassman . pag. 22

→ Esercizio: Riduzione a scala . pag. 26

→ Applicazioni Lineari . pag. 27

→ Matrice di una applicazione lineare . pag. 33

→ Sistemi lineari e rango . pag. 39

→ Determinante, matrici inverse e teorema degli orlati . pag. 45

→ Sottospazi affini . pag. 49

→ Prodotto vettoriale e casi particolari di sottospazi affini . pag. 56

→ Teorema fondamentale dell'algebra e spazi vettoriali complessi . pag. 62

→ Prodotti scalari su $\mathbb{R}$. pag. 66

→ Decomposizioni ortogonali e proiezioni ortogonali, prodotti hermitiani . pag. 72

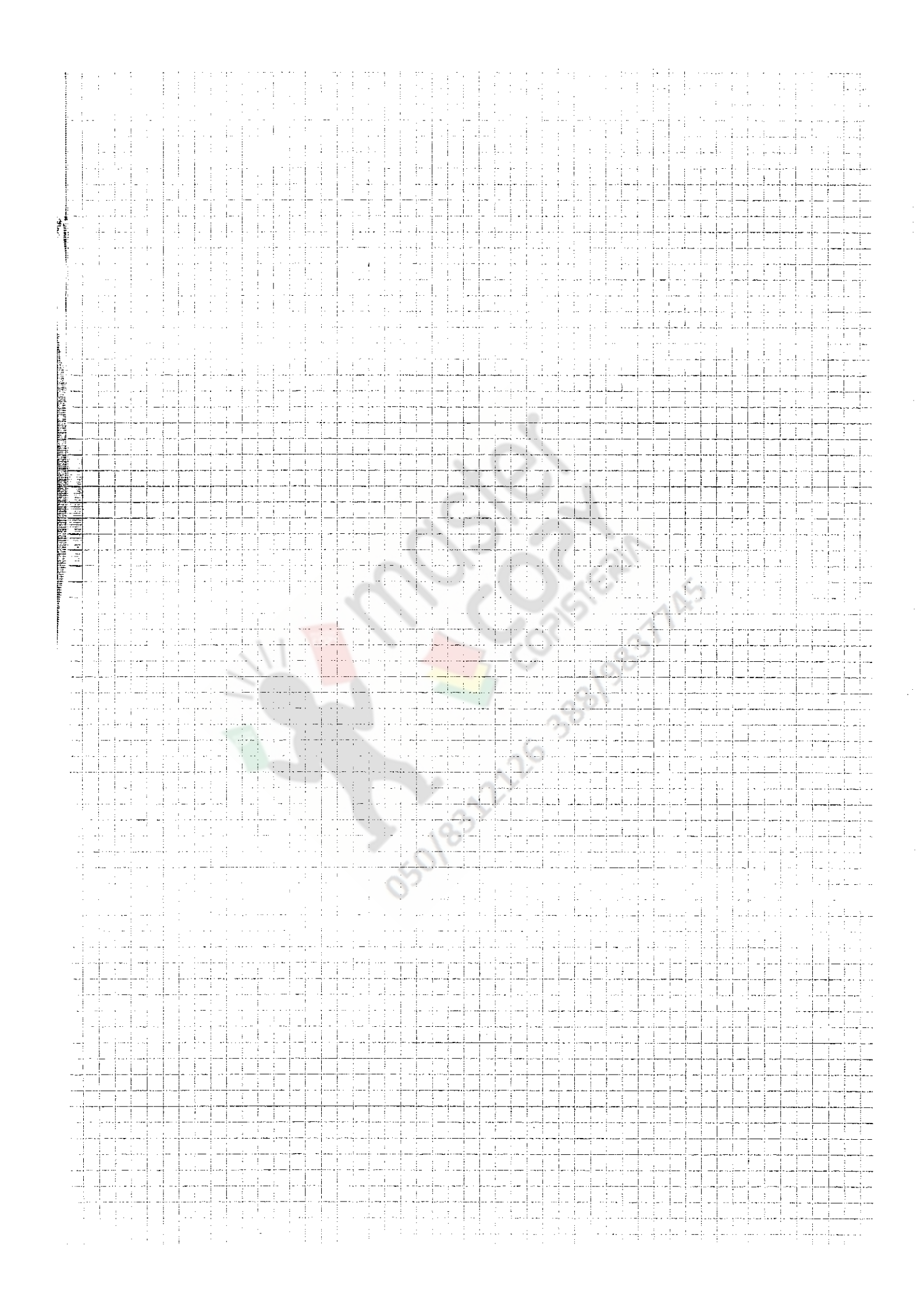
→ Diagonalizzabilità . pag. 76

→ Teorema Spettrale . pag. 83

→ RIASSUNTI . pag. 85

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



01.10.2013

Spazi vettoriali

DEF. Uno SPAZIO VETTORIALE REALE è un insieme V i cui elementi sono VETTORI per il quale sono definite due operazioni "+" - "SOMMA" e "·" - "PRODOTTO" che soddisfano certi assiomi o proprietà:

1. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$
2. $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) \quad \forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in V$
3. $\exists 0 \in V$ tale che $\boxed{0 + \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V}$ DEF. ZERO
4. $\forall \vec{v} \in V \; \exists \boxed{(-\vec{v}) \in V}$ tale che $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$ DEF. OPPOSTO

NOTE:

1) L'operazione "+" è BINARIA e INTERNA, ovvero una funzione $V \times V \to V$

2) L'operazione "·" è una funzione $\mathbb{R} \times V \to V$, che associa alla coppia $(\lambda, \vec{v})$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in V$) il vettore $\lambda \cdot \vec{v}$.

5. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V \quad \lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
6. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{v} \in V \quad (\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{v} \in V \quad (\lambda \cdot \mu)\vec{v} = \lambda(\mu \cdot \vec{v})$
8. $\forall \vec{v} \in V \quad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$, $0 \cdot \vec{v} = \boxed{0}$ ($0 \in \mathbb{R}$, $\boxed{0} \in V$) → questo è lo ZERO definito nella proprietà 3.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 333 9837745

② ESEMPI di SPAZI VETTORIALI

⟶ il PIANO $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

lo ZERO di $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

⟶ lo SPAZIO $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

a 4 dimensioni =

$$\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

⋮

a n dimensioni:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} ; \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

2.1) $\mathbb{R}^n$

2.2) $\mathbb{R}[x]$ = SPAZIO dei POLINOMI

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \dots + \lambda a_k x^k$$

se $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k$

$$\Rightarrow p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_k + b_k)x^k$$

OSSERVAZIONE: $\mathbb{R}[x]$ è uno SPAZIO VETTORIALE perché soddisfa le proprietà di uno spazio vettoriale.

08.10.2013

Associatività del prodotto fra Matrici

$x \heartsuit (y \heartsuit z) = (x \heartsuit y) \heartsuit z$

$A(BC) = (AB)C$

$\longrightarrow$ $\underbrace{\underbrace{A}_{m\times k} \cdot \underbrace{B}_{k\times n}}_{m\times n}$

RICORDA: $(A \cdot B)_{ij} = \sum_{p=1}^{k} (A)_{ip} \cdot (B)_{pj}$

PROPOSIZIONE: Siano $A \in \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{R})$

$B \in \mathcal{M}_{k\times l}(\mathbb{R})$

$C \in \mathcal{M}_{l\times n}(\mathbb{R})$

Allora $A(BC) = (AB)C$

DIMOSTRAZIONE:

1. Il prodotto fra matrici è vincolato dalle loro taglie: si faccia un controllo.

$$\underbrace{A}_{m\times k}\ \underbrace{(BC)}_{k\times n} = \underbrace{(AB)}_{m\times l}\ \underbrace{C}_{l\times n}$$

$m\times n$ $\longleftrightarrow$ VERO! $\longleftrightarrow$ $m\times n$

2. Coefficiente (ij)-esimo

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{p=1}^{k} (A)_{ip} (BC)_{pj}$$

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{q=1}^{l} (AB)_{iq} (C)_{qj}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745